Tentamen Complexe Analyse
9 Februari 2007, 09.00–12.00 uur

1. Laat $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$, een polynoom zijn met reële coefficienten. Toon aan dat de nulpunten van P reëel zijn of als complex toegevoegde paren voorkomen.

2. Definieer de functie $f(z)$ door $f(z) = \frac{z^2}{z+2}$.

   (a) Toon aan dat de functie analytisch is in een omgeving van $z = 0$.

   (b) Bereken expliciet de convergente machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die in een omgeving van $z = 0$ gelijk is aan $f(z)$.

   (c) Bereken de convergentiestraal van die convergente machtreeks.

3. Bepaal de eerste drie termen in de Laurent-ontwikkeling voor

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}\, e^z,$$

   rond het punt $z = 0$. Wat is het residue van deze functie in $z = 0$?

4. Definieer de functie $f(z)$ door $f(z) = e^{iz^2}$. Laat zien dat de functie $|f(z)|$ een maximum bezit op de verzameling

$$\{\, z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| \leq 1,\ |\mathrm{Im}\, z| \leq 1 \,\}.$$

   Bereken dit maximum en beargumenteer het antwoord.

5. Bereken via residuenrekening de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2 - \sin\theta}\, d\theta.$$

6. Bepaal voor $a > 0$ de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx,$$

   met behulp van residuenrekening. Geef een afschatting voor de integraal over de boog of formuleer een resultaat uit het boek waarmee deze afschatting verkregen kan worden.

Tentamen Complexe Analyse 09/02/07

1. $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ a_k reëel $\Rightarrow$ $\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = P(\bar z)$

dus $P(z)=0 \Leftrightarrow P(\bar z)=0$

2. $f(z)=\frac{z^2}{z+2}$ voor $z=0$ is $\frac{1}{z+2}\neq 0 \Rightarrow f(z)$ anal. in $z=0$; quotiënt van anal. functies

$f(z) = z^2 \frac{1}{2[1+\frac{z}{2}]} = \frac{1}{2} z^2 \left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots\right) = \frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{4}+\frac{z^4}{8}-\frac{z^5}{16}+\cdots$

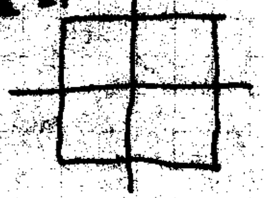
convergentie straal $R=2$ door meetkundige reeks. Of eerste sing. vanuit 0 gezien

3. $f(z)= \frac{\sin z}{z^3} e^z = \frac{1}{z^3}\left[z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right]\left[1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right]$

$=\frac{1}{z^3}\left[z+z^2+z^3\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots\right] = \frac{1}{z^3}\left[z+z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots\right]$

$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{3}+\cdots$ residu $f(z)$ in $z=0$: 1

Rechtstreeks: $\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{\sin z}{z^3} e^z\right] = \lim_{z\to 0} \frac{z(\cos z+\sin z)e^z - \sin z\, e^z}{z^2} = 1$



4. $f(z)=e^{z^2}$ $z=x+iy$ $z^2=x^2-y^2+2ixy$ $|f(z)| = e^{x^2-y^2}$

$x=1$ $\max|f(z)| = \max_{-1\le y\le 1} e^{1-y^2} = e^1$ symmetrie

$\max|f(z)| = e^1$ NB. $|f(z)|$ continu op $|z|\le 1$ dus max bestaat (Weierstrass)
$f(z)$ anal. op $|z|\le 1$ dus max $|f(z)|$ op rand

5. [illegible]

$= \int_{|z|=1} \frac{(z+1/z)/2}{2-(z-1/z)/2i} \frac{dz}{iz} = \int \frac{z^2+1}{[illegible] - (z^2-1)/i} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{-z^2+4iz+1} \frac{dz}{z}$

$= -\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^2-4iz-1} [illegible]$ [illegible] $= (z-2i)^2+3$

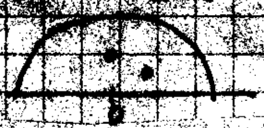
$z = 2i \pm \sqrt{3}$ [illegible]

$= -2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=0} + \mathrm{Res}_{(2-\sqrt{3})i}\right] = -2\pi i\left[-1+1\right] = 0$ NB $(z+\frac{1}{z})\frac{1}{2z-4i}$ [illegible]

"Rechtstreeks": $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{[illegible]} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{[illegible]} d\theta = \int_{\mathbb{R}} \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{1}{[illegible]} dt$ $\left\{ t=\tan\frac{1}{2}\theta \ [illegible] \ d\theta = \frac{2}{1+t^2}dt \right.$

$\Rightarrow \int_C \frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{1}{t^2+t+1} dt = 2\pi i\left[\mathrm{Res}_{t=i} + \mathrm{Res}_{t=-\frac12+\frac12 i\sqrt{3}}\right] = 2\pi i\left[[illegible] + \frac{[illegible]}{[illegible]}\frac{1}{i\sqrt3}\right]$

$= 2\pi i\left[1-1\right] = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{1}{t^2+t+1} dt = 0$



6. $\int_{\mathbb{R}} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$ $\int_C \frac{z e^{iz}}{z^2+a^2} dz$

$\int_C \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}_{z=ia} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2} = \pi i e^{-a}$

$\int_C \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} dz$ $\left|\int_{C_R}\right| = \int_{C_R} |e^{iz}||dz| \to 0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{x\cos x + i x\sin x}{x^2+a^2} dx = \pi i e^{-a} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{x\cos x}{x^2+a^2}dx = 0$ $\int_{\mathbb{R}} \frac{x\sin x}{x^2+a^2} dx = \pi e^{-a}$